

太陽系形成論勉強会
2013年6月7日 東京工業大学



原始惑星系円盤の進化と 大規模計算

武藤恭之
(工学院大学)

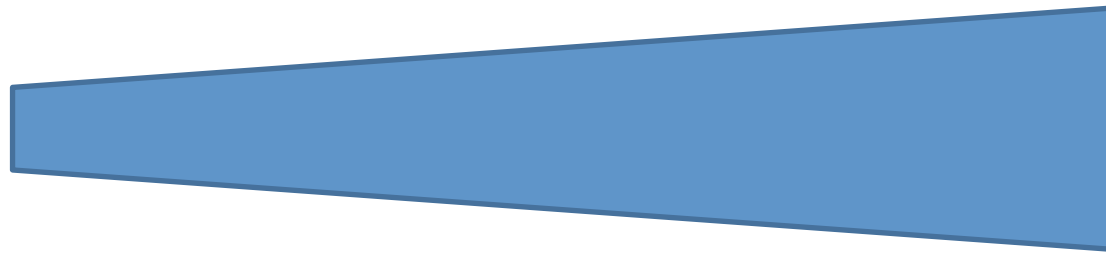
原始惑星系円盤

- 惑星形成の母体
 - どのような姿をしているのか、よくわかっていない
- 降着円盤の一例としての研究対象
 - 降着円盤はなぜ降着するのか？
 - 降着円盤は本当に降着するのか？



粘性降着円盤

- 物質が降着すると、エネルギーが下がる
- ほとんどの質量は中心星に降着
 - 角運動量を保存するために、少量の物質は外へ
- 物質間での角運動量輸送が必要
 - 「粘性」が必要



$$e_{\text{tot}} = -\frac{GM_*}{2r}$$

$$j = \sqrt{GM_*r}$$

Alpha Disk Model

- 粘性パラメータ: α
 - 角運動量輸送 + 質量降着

- 質量降着率:

$$\dot{M} = 3\pi\alpha\Sigma H^2\Omega$$

- 円盤寿命:

$$\tau \sim \frac{1}{\alpha} \frac{R^2}{H^2} t_K$$

降着円盤としての原始惑星系円盤

- 原始惑星系円盤
 - 寿命 $\sim 10^{6-7}$ yr
 - 質量 $\sim 0.01-0.1$ Msun?
 - 円盤の厚み $\sim 0.1 * \text{半径}?$
- 質量降着率 $\sim 10^{-8}$ Msun/yr
- 必要な α の値 $\sim 10^{-2 \sim -3}$
 - 分子粘性では不足
 - 乱流粘性: 自己重力? MRI?

乱流粘性の力学的基礎 (1)

•流体の方程式:

Balbus and Papaloizou (1999)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\Sigma} \nabla P - \nabla \Psi_*$$

•方位角方向平均

$$v_\phi = r\Omega + \delta v_\phi$$

➡ 角運動量の保存則:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(r \overline{\Sigma \delta v_\phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \overline{\Sigma v_r \delta v_\phi} \right) = 0$$

乱流粘性の力学的基礎 (2)

•質量保存

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \overline{\Sigma v_r} \right) = 0$$

•角運動量保存

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(r \overline{\Sigma v_\phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \Omega \overline{\Sigma v_r} + r^2 \overline{\Sigma v_r \delta v_\phi} \right) = 0$$

時間発展

質量フラックス

ストレス

Kepler回転の円盤の場合: $\delta v_\phi = 0$

$$\overline{\Sigma v_r} = - \frac{1}{r(r^2 \Omega)'} \frac{\partial}{\partial r} \overline{\Sigma v_r \delta v_\phi}$$

ストレスと質量フラックスに関係が付く

乱流粘性

•再び質量保存:

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(r^2 \Omega)'} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \overline{\Sigma v_r \delta v_\phi} \right]$$

$$\Sigma W_{r\phi} \rightarrow \alpha c^2 \Sigma$$

拡散方程式 → ストレスを、粘性とみなす: α

viscosity

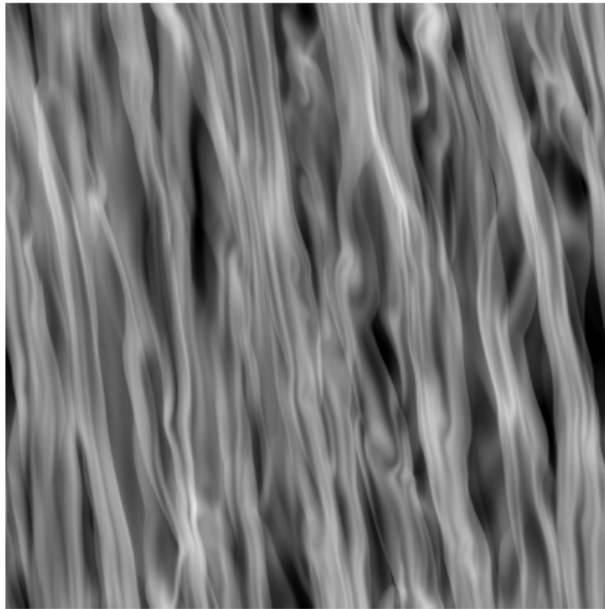
局所的なエネルギー散逸:

$$Q_e = -\Sigma W_{R\phi} \frac{d\Omega}{d \ln R}$$

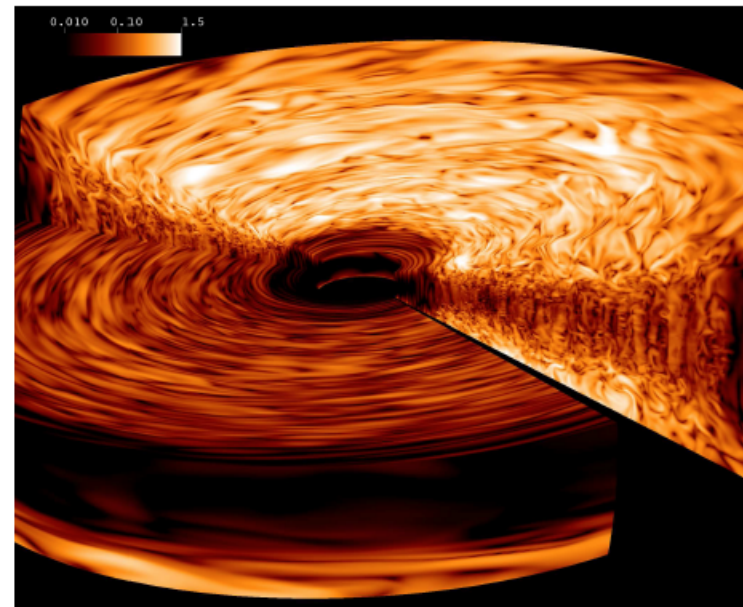
$$\dot{E} = -F_J \frac{d\Omega}{dr}$$

円盤乱流

- 角運動量輸送の担い手
 - 円盤に立つ非軸対称の波
 - Alfvén波 (MRI), 密度波 (重力不安定乱流)
- 密度波を例にとって、以下議論する



Gammie 2001



Flock et al. 2011

原始惑星系円盤の概略

- 以下の三つは全て(ほぼ)同じ
 - 原始惑星系円盤は冷たい
 - 原始惑星系円盤の厚みは薄い
 - 原始惑星系円盤はほぼKepler回転する

$$\frac{c}{v_{\phi}} \sim \frac{H}{R} \sim 0.05 - 0.1$$

- Kepler回転 → 差動回転円盤

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{R^3}}$$

密度波理論



- 差動回転する円盤にたつ(非軸対称の)音波の理論
- 要素:
 - パターン速度と共回転半径
 - 円盤の音速
 - 差動回転の強さ(エピサイクリック振動数)
- I型惑星移動の原因

密度波の形状と伝搬の理論

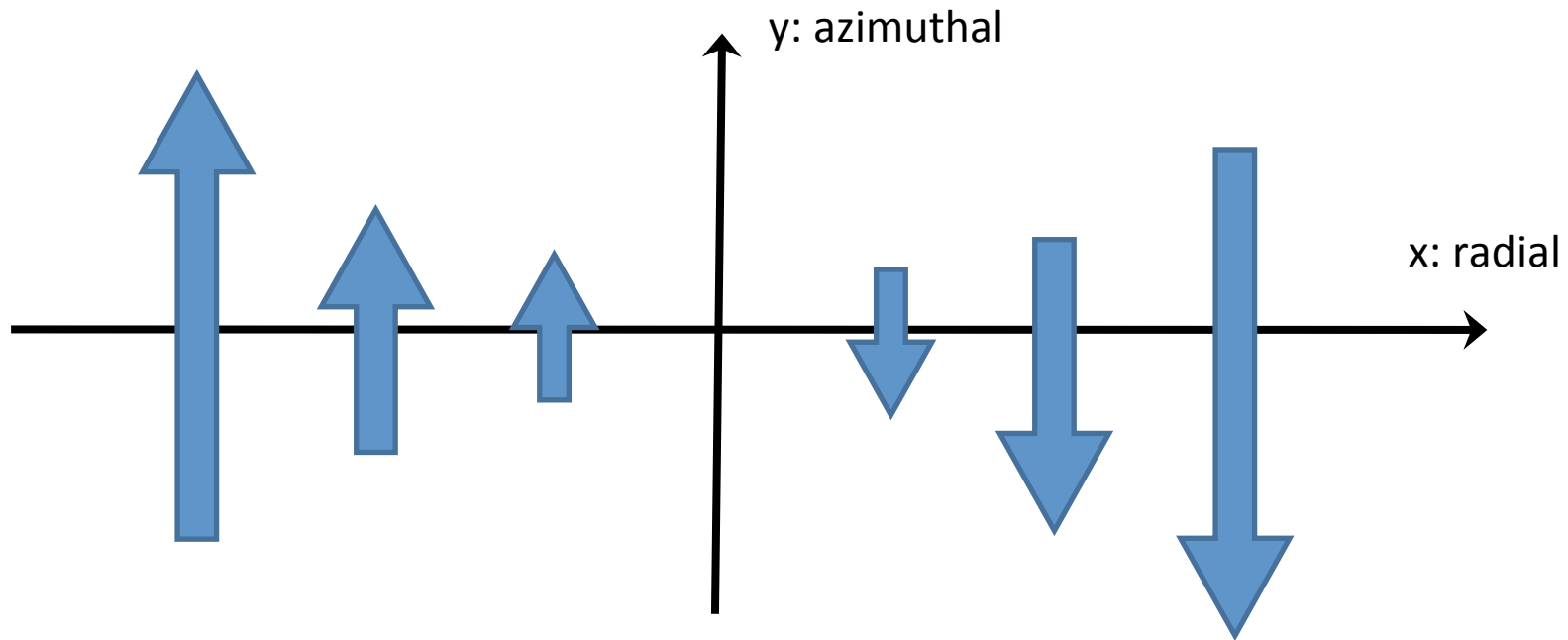
- しょせん音波である
- パターンは剛体回転
 - 適当な回転系に乗れば、「定常状態」
- 原始惑星系円盤は超音速流

$$\frac{v_K}{c} = \frac{R}{H} \sim 10 - 20$$

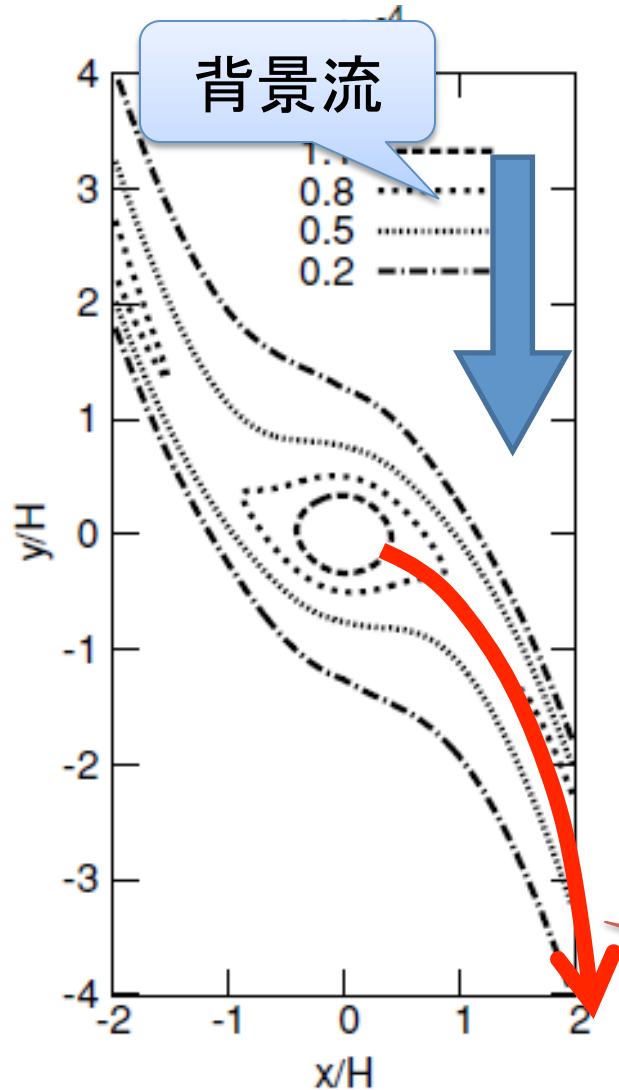
- 「二次元超音速流の定常状態」
 - 理論が良くわかっている

円盤のある場所の拡大図 シアリング・シート

$$v_y = -\frac{3}{2}\Omega_p x$$



密度波の形状



- 密度揺らぎが、背景の超音速流に「流される」

特性曲線の方程式:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \frac{v_x v_y \pm c \sqrt{v^2 - c^2}}{v_x^2 - c^2}$$

Landau & Lishitz

密度波の形状が導ける

$$y \sim -\frac{3x^2}{4H} + y_0$$

情報伝達の方法

密度波の角運動量保存

$$\cancel{\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(r^2 \Omega)'} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \overline{\Sigma v_r \delta v_\phi} \right]$$

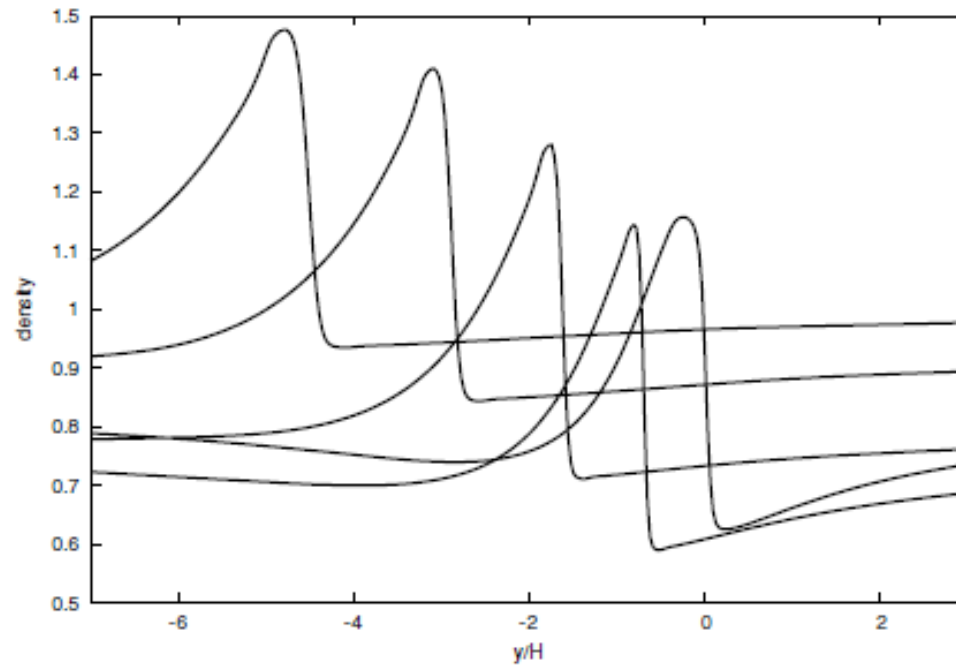
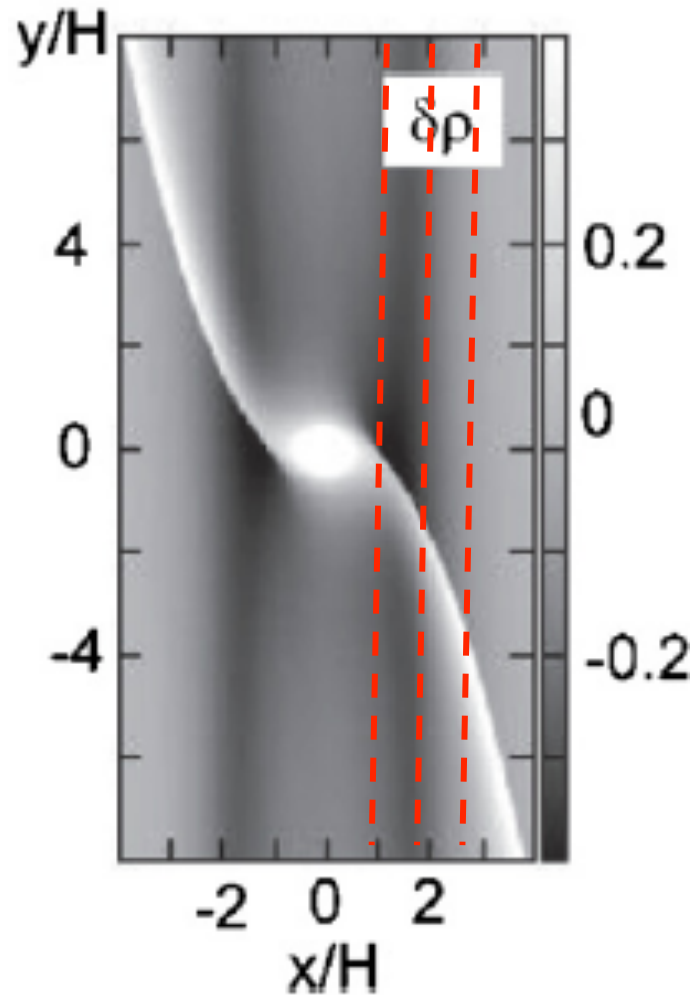
定常解

なので、右辺もゼロ

波の持つ角運動量

- 密度波が伝わっているだけでは、角運動量は運ばれるだけで、円盤の様々な場所でのやり取りはしない
- 波が散逸して、波の持つ角運動量を円盤に渡すプロセスが大事

密度波の伝搬と衝撃波形成

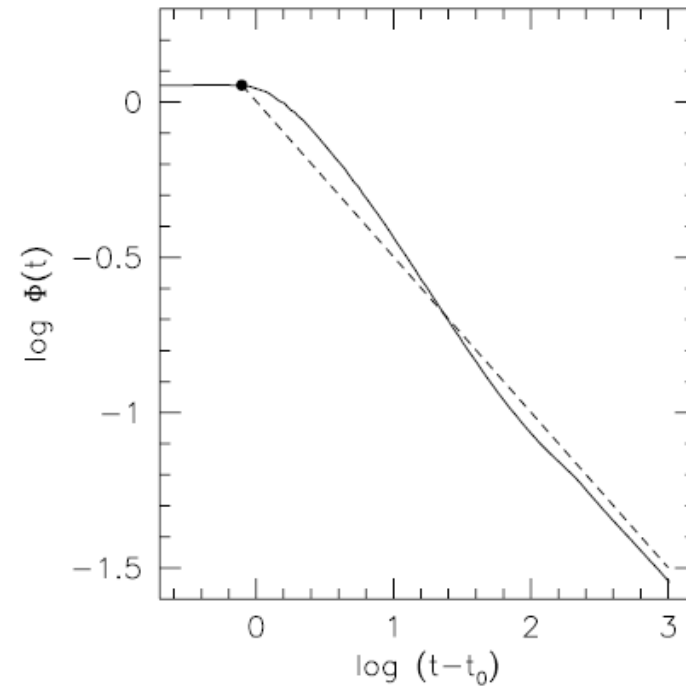
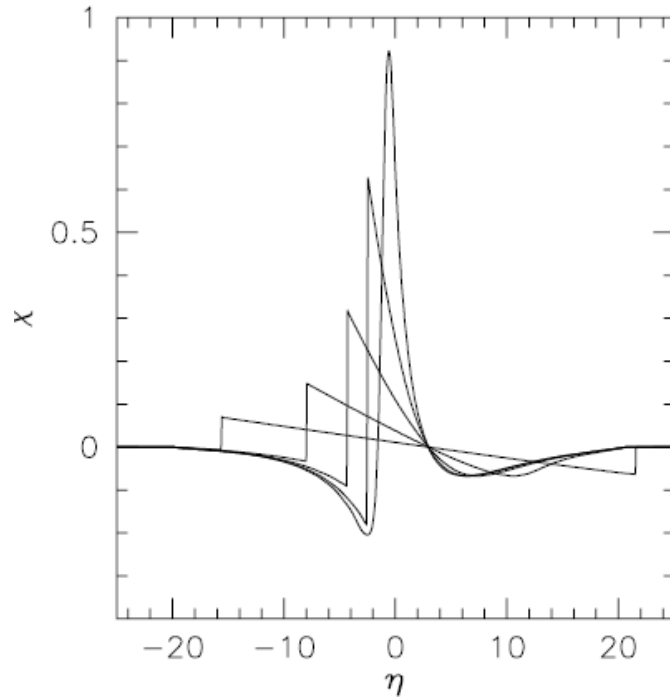


密度波(音波)の伝搬

→ shock散逸

→ 角運動量輸送

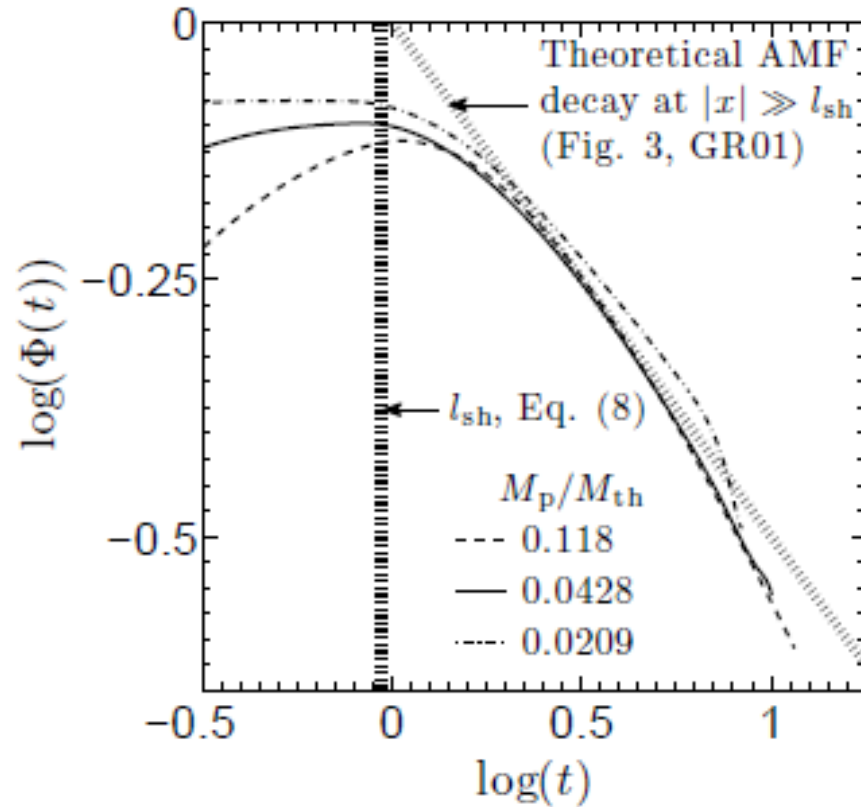
Shock散逸の理論



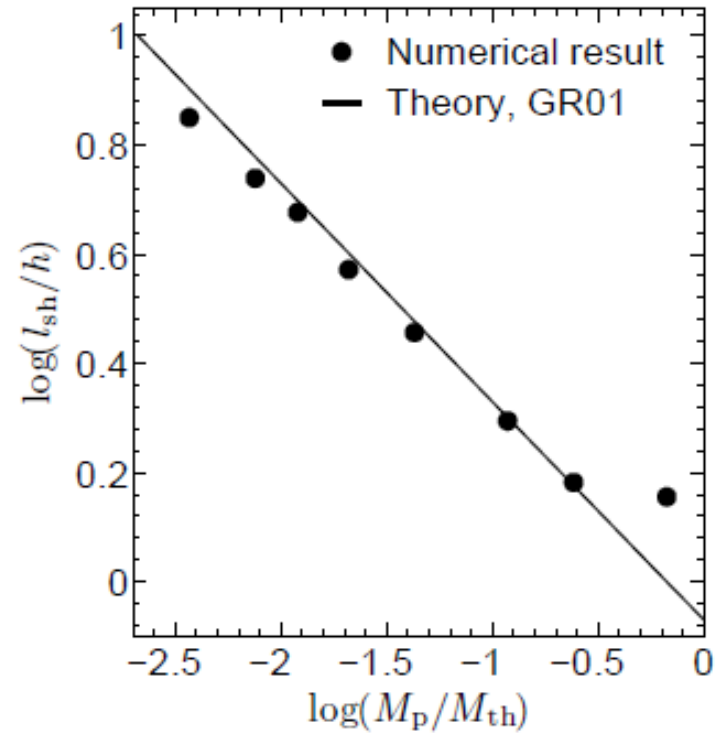
Goodman and Rafikov 2001:
Burgers方程式を用いた波
の切り立ちの解析

$$|x|_{\text{shock}} \approx 0.93 \left(\frac{\gamma + 1}{12/5} \frac{M_p}{M_1} \right)^{-2/5} h$$
$$f_J(x) \propto |x|^{-5/4} \quad (|x| \gg |x|_{\text{shock}})$$

数値シミュレーションとの比較

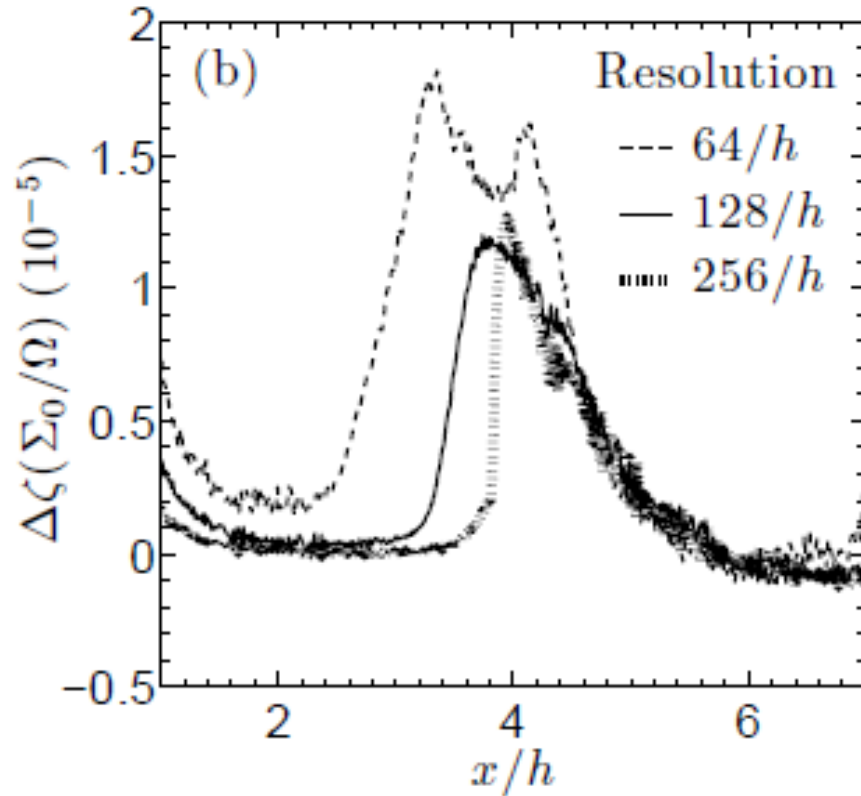


角運動量フラックス



Shock生成位置

要求される解像度



- Specific vorticityの解像度依存性

– 流体粒子のもつ比角運動量のようなもの

$$\zeta \equiv \frac{\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) + 2\Omega}{\Sigma}$$

密度波の振幅が弱い場合は、スケールハイトを100分割程度する必要

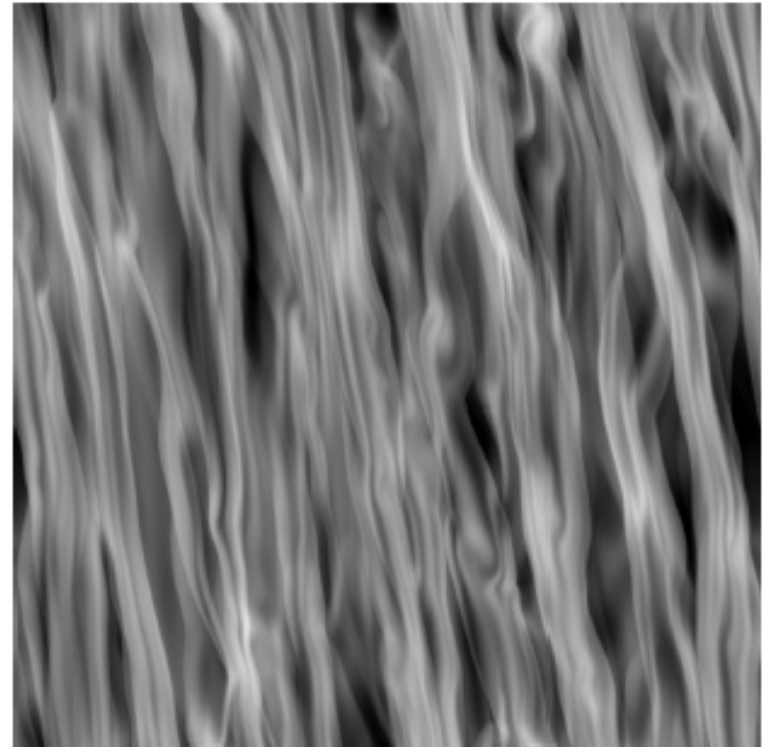
小まとめ

- 円盤進化のシミュレーション
 - 降着円盤は降着するか？
 - もちろん！
 - しかし、誰もちゃんと見た人は居ない
- (密度波に関して言えば、) 基礎理論はかなり掘り下げて調べられている
 - 比較・検証すべき理論は色々とある
- 円盤中の波の進化をきちんと空間分解することが重要だろう
- そのためには、スケールハイトを100分割するくらいの空間解像度を要求される(かもしれない)
 - ペタコンで出来る計算はどういうものか？

以降、議論のネタ

自己重力不安定乱流

- 重力不安定乱流
 - 自己重力不安定らしきものにはなるが、円盤が分裂しない状態
 - 軸対称モードはなんとか安定だが、非軸対称のモードが成長
 - 分裂するかどうかは、cooling timescaleで決まると言われている



$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (Uv) = -P\nabla \cdot v - \frac{U}{\tau_c} \quad \text{Gammie's criterion} \quad \tau_c \lesssim 3\Omega^{-1}$$

Gammie条件は正しいか？

Numerical convergence in self-gravitating shearing sheet simulations and the stochastic nature of disc fragmentation

Sijme-Jan Paardekooper^{1*}

- 分裂条件はResolutionに依存する
- 冷却時間が長くなる (coolingが効かなくなる) と、確かに分裂しにくくなるが：
 - 分裂までの時間が長くなる
 - Clumpがシアで引き伸ばされ、生き残りにくくなる (解像度依存?)
- 解像度が高いと、よりclumpの中心部 (高密度領域) まで追えるので、clumpが生き残りやすく、分裂も起こしやすい

円盤シミュレーション

- 要求解像度

- どこまで解像度が欲しいかというのは、おそらくコンセンサスがない
- スケールハイトの p 倍の解像度を要求
- 密度波のshockをちゃんと追えるくらいあれば十分だろう ($p \sim 0.01$)

ひとまず計算

- Box size:
 - $R_{in} \sim R_{out} = r * R_{in}$
 - $2\pi * k * R_{out}$ ($k \leq 1$)
 - Z方向、スケールハイトの数倍程度
- Mesh size: スケールハイトのp倍
 - 半径1~10くらいを計算したいとすると (こんなに要らないだろう)
 - $(N_R, N_{\phi}, N_z) = (10000, 10000, 1000)$
 - 無謀
- 外側で N_t 周を要求 10000周にしておく(多すぎる)
- 1メッシュ・1ステップあたりの計算回数: $n_{mesh} \sim 10000$ 回?
- クーラン数 ϵ
 - クーラン条件は内側境界のKepler速度で決まるとする

$$N_{calc} \sim 10^{26} \left(\frac{k}{1}\right)^2 \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{-1} \left(\frac{p}{0.01}\right)^{-4} \left(\frac{N_t}{10^4}\right) \left(\frac{n_{mesh}}{10^4}\right) \left(\frac{r}{10}\right)^{3.5} \left(\frac{R_{in}/H}{20}\right)^3 \left(\frac{Z/H}{10}\right)$$

Pflopsで3000年

スキームの工夫

- FARGO スキーム
 - Kepler回転の分だけ手で先に動かしてしまう
 - クーラン条件で、音速くらいを考えれば良くなる
 - 10倍くらい計算が高速化
 - SPHで出来るのか？

$$N_{\text{calc}} \sim 10^{26} \left(\frac{k}{1}\right)^2 \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{-1} \left(\frac{p}{0.01}\right)^{-4} \left(\frac{N_t}{10^4}\right) \left(\frac{n_{\text{mesh}}}{10^4}\right) \left(\frac{r}{10}\right)^{3.5} \left(\frac{R_{\text{in}}/H}{20}\right)^3 \left(\frac{Z/H}{10}\right)$$

3次元シアリングシート

- 方位角方向を 2π も計算しない
 - 自己重力の計算は本当に良いか？
 - 半径方向の広さを1/5にして、方位角方向の広さを1/10にすると、 10^{-4} 倍くらい計算回数が減る

$$N_{\text{calc}} \sim 10^{26} \left(\frac{k}{1}\right)^2 \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{-1} \left(\frac{p}{0.01}\right)^{-4} \left(\frac{N_t}{10^4}\right) \left(\frac{n_{\text{mesh}}}{10^4}\right) \left(\frac{r}{10}\right)^{3.5} \left(\frac{R_{in}/H}{20}\right)^3 \left(\frac{Z/H}{10}\right)$$

2次元global計算(厚みなし)

- 計算回数は 10^{23} 回程度か
 - 外側で10000周追うなら、Pflopsで3年
 - 100周(内側で3000周)で良ければ、2週間

$$N_{\text{calc}} \sim 10^{26} \left(\frac{k}{1}\right)^2 \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{-1} \left(\frac{p}{0.01}\right)^{-4} \left(\frac{N_t}{10^4}\right) \left(\frac{n_{\text{mesh}}}{10^4}\right) \left(\frac{r}{10}\right)^{3.5} \left(\frac{R_{in}/H}{20}\right)^3 \left(\frac{Z/H}{10}\right)$$