

太陽系形成論勉強会

牧野淳一郎

2013/6/7 太陽系形成論勉強会

はじめに: いくつかアナウンス

- プログラム: <http://www.jmlab.jp/?p=97> にあります。
- パブリック無線 LAN: 今回用意してません。外からの人すみません。
- 発表資料: USB で集めて、問題ないものは公開したいと思います。

プログラム

一応

10:00-10:50 (主旨説明 10+30+10) 牧野 大規模 SPH での円盤計算

10:50-11:30(30+10) 井田 太陽系形成論の現在

11:30-13:00 昼休み

13:00-13:40(30+10) 奥住 氷微惑星形成

13:40-14:20(30+10) 武藤 ガス円盤の構造と進化

14:20-14:50 休憩

14:50-15:30(30+10) 垓本 隕石を作った初期太陽系プロセス

15:30-16:10(30+10) 玄田 地球の水の起源

16:10-16:40 休憩

16:40-17:30 議論

18:00-20:00 位 懇親会

座長: (ここで依頼。すみません) 玄田、牧野、武藤、牧野？

実際の進め方

- まあもうちょっと適当に
- 重要そうな論点があれば多少時間超過してもいいかもの

開催趣旨

京」のような大きな計算機もでき、また牧野のグループでここ数年 SPH 法の改良を進めてきて、いくつかの困難が解決できた、ということもあり、惑星形成過程に、かなり力任せな3次元流体シミュレーションでアプローチできないか、という検討を始めています。

3次元のガス円盤シミュレーションは、格子法にしても粒子法にしてもそんなに何回転もできない、という問題がずっとあって、これはもちろん解決しているわけではないのですが、粒子法では人工粘性をいじることでだいたい回るようになってきてます。

(参考:<http://ads.nao.ac.jp/abs/2010MNRAS.408..669C>)。そのような方向性について議論しよう、ということで研究会を企画しました。

というわけで

まずは、3次元ガス円盤計算ってどれくらいできそうか？という話を。

話の概要

- はじめに: 3D ガス円盤の長時間計算?
- 何故ないか?
- なんとかできないか?

はじめに: 3D ガス円盤の長時間計算?

- 惑星過程の教科書的な理解: ガス円盤の中で微惑星ができたり原始惑星になったりする。タイムスケールは100万年辺り
- 微惑星・原始惑星の N 体計算: 沢山あるけどガスは全部外場
- どうして?
 - 計算量
 - 計算精度
 - 安定性
 - できるサイエンス

計算量は？

- 例えば1億粒子くらいの SPH を考える
- 粒子間距離は 10^{-3} AU くらい、音速は 1km/s として 0.2AU/y。タイムステップは 1日くらい？
- 3億ステップくらいいる。
- 1粒子・ステップあたり1000演算とすると、全体で 3×10^{19} 演算。1Tflops で1年、1Pflops で10時間

意外に大したことない。1Pflops・年なら2百億粒子くらい。

メッシュだと？

- 1億格子円筒座標、 $(1000, 1000, 100)$ とする。(z方向少ない気も)
- タイムステップは $1/1000$ 年よりだいぶ短い。
- 10-30億ステップくらいいる。
- 1格子点・ステップあたり300演算とすると、全体で 10^{20} 演算。SPH より多いがそんなに変わらない？

当面どれくらいの計算量が使えるか？

- TF・年: できなくはない。1CPU が200Gflops くらいある。4台くらいで並列計算とか、16台なら3ヶ月とか、GPU でがんばればもう2-3倍速いかも。
- 10TF・年: 天文台の XC30 の1週間分。「京」の0.1%。(戦略分野5に大体10% くるので、その1%。年に数ランはできる。
- 100TF・年: 戦略分野5 割り当ての10%。やる意義があるならできる。

粒子数 (あるいは格子数) と積分時間

CFL 条件で決まるとすれば:

$$\text{積分時間} \times (\text{粒子数})^{4/3} = \text{一定}$$

100 TF・年なら

- 30 億粒子 100 万年
- 170 億粒子 10 万年
- 1000 億粒子 1 万年

粒子 (格子) 数 1 桁減らすと 20 モデルできる。

計算精度

100万年計算とかそもそも精度的に可能か？という問題

- 粒子法:数値粘性
- メッシュ法:数値拡散

SPH と数値粘性

- SPH の数値粘性には2つあると言われている
 - ショックを扱うための人工粘性がショック以外でも働いてしまう
 - particle noise による成分
- 後者のスケーリング: 一様シア一流での1粒子・単位時間のエネルギーフラックスは $O(\text{粒子半径}^2 \times \text{隣の粒子との相対速度})$ のはず (本当?)
- 単位面積あたりだと結局 $O(\text{隣の粒子との相対速度})$
- つまり、 $R_e \propto N^{1/3}$
- 10億粒子もあると1万回転くらいはしそう。
- particle noise 成分についてはまだ減らせる方法があるかもしれない(論文はでている)

格子と数値拡散

- 数値拡散:オイラー的な格子を波が進めば必ず散逸がある
- 大雑把には、ある波長の波が波長分進むと、 $O(n^{-p})$ くらい散逸するはず。 n は1波長内の格子点数、 p は空間差分の次数
- 例えば半径の $1/10$ くらいの波数だと、半径方向1000メッシュなら 16 格子点くらい。100万回転するためには 6×10^7 波長進んでも形が残っていて欲しいので、6次くらいのスキームが必要。これに5点差分するスキームなら3000メッシュくらい必要かも。
- 原始惑星系円盤ではこんな精度に意味があるか(必要か)は? 銀河円盤のように低温、自己重力的なら精度必要だが、、、

安定性

- SPH: ディスク内縁での viscous instability は問題
- レイノルズ数大きくなれば一応成長は遅くなるはず。
- 格子法: ?

で、サイエンス？

- 基本的には、この後の講演者の話をきいて考えましょう、という話
- 話としてはディスクの乱流状態を表現できてもいいくらいになる
 - ガスディスク自体の進化
 - ガス・ダスト相互作用、乱流の中でのダスト成長 (もちろん、そのままできるわけではないのでなにかスケールリング必要)
 - ガスディスクの中での微惑星成長・原始惑星成長 (ただみんな落ちるだけかもしれないけど、、、)

まとめ

- 格子法・粒子法ともに、計算量的にはある程度の分解能で1万-100万回転の3次元計算はできなくもなさそうである
- 数値粘性・数値拡散を十分抑えられているかどうかは検討必要
- 乱流状態のディスクを直接表現して、その中で色々調べる、というのもできるかもしれない

以下おまけ

- SPH には、いいところもあれば悪いところもある
- いいところは、ラグランジュ法なので構造形成や変形に強い、密度構造の発展に自動的に追従する、
- 悪いところは、、、

話の概要

- SPH には、いいところもあれば悪いところもある
- いいところは、ラグランジュ法なので構造形成や変形に強い、密度構造の発展に自動的に追従する、
- 悪いところは、、、 なんだか沢山あると言われている

話の概要

- SPH には、いいところもあれば悪いところもある
- いいところは、ラグランジュ法なので構造形成や変形に強い、密度構造の発展に自動的に追従する、
- 悪いところは、、、なんだか沢山あると言われている
- どういう悪いところがあって、どんな対策がなされているか、どうしようもないものがあるのか？というような話をする。

話の順番

- SPH の基本的な定式化
- 欠陥のリスト
- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面
- その他
- まとめ

SPH の基本式

ある物理量 f の推定

$$\langle f \rangle(\vec{x}) = \int f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}'. \quad (1)$$

密度の推定

$$\rho(\vec{x}) = \sum_j m_j W(\vec{x} - \vec{x}_j), \quad (2)$$

SPH 近似

$$\langle f \rangle = \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho(\vec{x})} W(\vec{x} - \vec{x}_j). \quad (3)$$

SPH の基本のつづき (1)

f の微分: $\langle \nabla f \rangle = \nabla \langle f \rangle$ で、以下の恒等式

$$1 = \sum_j m_j \frac{1}{\rho(\vec{x})} W(\vec{x} - \vec{x}_j). \quad (4)$$

を使って、さらにもうちょっと近似して

$$\langle \nabla f \rangle(\vec{x}) \sim \sum_j m_j \frac{f(\vec{x}_j)}{\rho(\vec{x}_j)} \nabla W(\vec{x} - \vec{x}_j). \quad (5)$$

SPH の基本のつづき (2)

運動方程式は $-\frac{1}{\rho}\nabla P$ を計算する。この時に恒等式

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = \frac{P}{\rho^2}\nabla\rho + \nabla\frac{P}{\rho^2}. \quad (6)$$

を使って対称化すると

$$\dot{v}_i = -\sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j), \quad (7)$$

になる。

SPH の欠陥のリスト

- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面

こんな色々問題点があるなら メッシュのほうがよくないか？

- まあそうかも？
- とはいえ、メッシュにはメッシュの問題がある。
 - 低温で自己重力も効くディスクはオイラー法では非常に大変
 - 原理的には、タイムステップが格子マッハ数に比例、必要な計算精度はマッハ数の3乗に比例
 - AMR の並列化はそれだけで一生が終わるくらい大変
 - moving mesh という話もあるが、、

SPH の欠陥のリスト

- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面

人工粘性

- 衝撃波は流体の運動方程式だけではでてこない。
- なので、なんらかの方法で扱う必要あり
- メッシュでは、リーマンソルバが普通。ショックのところで解析解を使う。
- SPH では、人工粘性を入れるのが普通

人工粘性の問題

- ショックがなまる — 但し、SPH ではあらゆるものがどうせ必ずなまるので、これは問題ではないという主張もある。
- ショックがないところでも粘性が働く。色々な流れが勝手に減衰して消える
 - 音波
 - 渦 (差動回転)
- ガス円盤が勝手に落ちたりする

人工粘性の形

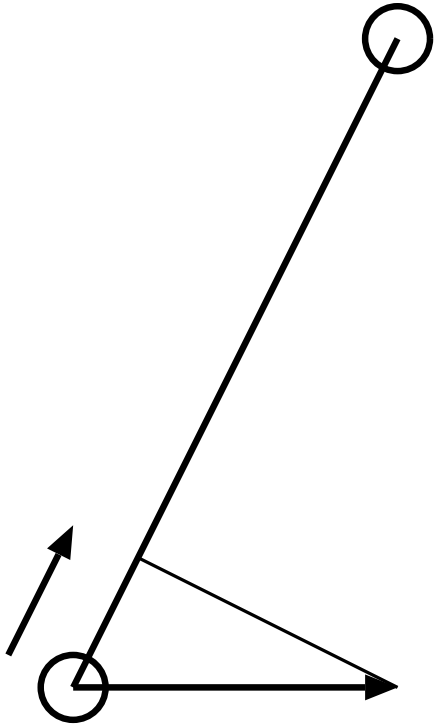
$$\dot{v}_i = - \sum_j m_j \Pi_{ij} \nabla W_{ij} \quad (8)$$

$$\Pi_{ij} = (\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) / \rho_{ij} \text{ (近づいているとき)} \quad (9)$$

$$\mu_{ij} = (h_{ij} v_{ij} \cdot r_{ij}) / r_{ij}^2 \quad (10)$$

みたいな感じ

そもそも気になること



- ショックにたいして粒子が斜めの位置にあると粘性項が弱くなる
- ショックの向きに対してあさつての方向に力をかけて速度を止めようとしている。

色々な改善案

無限に沢山ある = 確立したものはない。
広く使われているもの:

Balsara Switch $|\nabla \cdot v| / (|\nabla \cdot v| + |\nabla \times v|)$

これはシア-への補正だけ (あとで詳しく)

SPH の欠陥のリスト

- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面

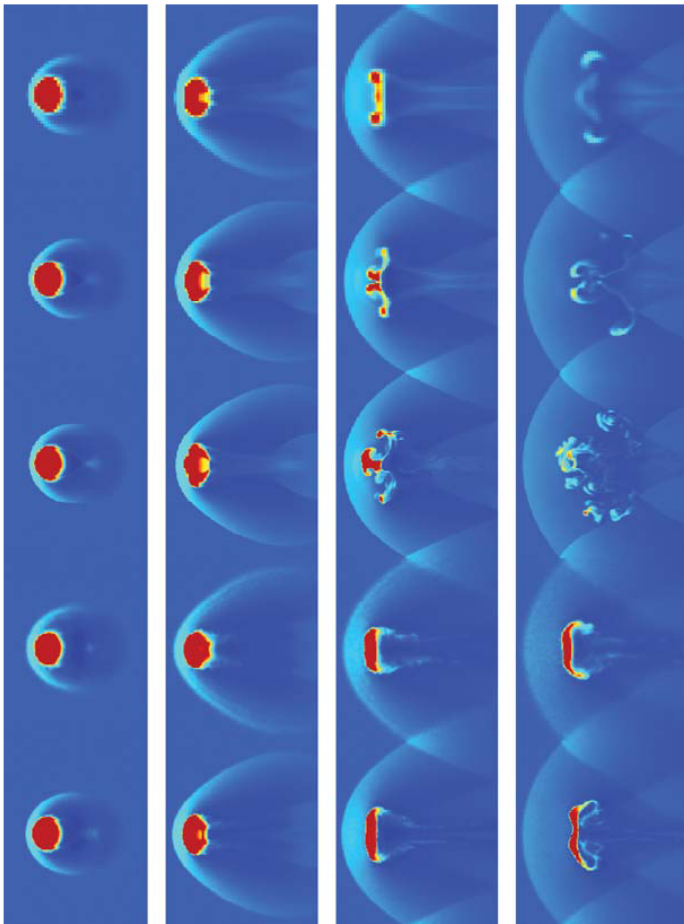
SPH と接触不連続、KH 不安定

Agertz et al (MN 2007, 380,963)

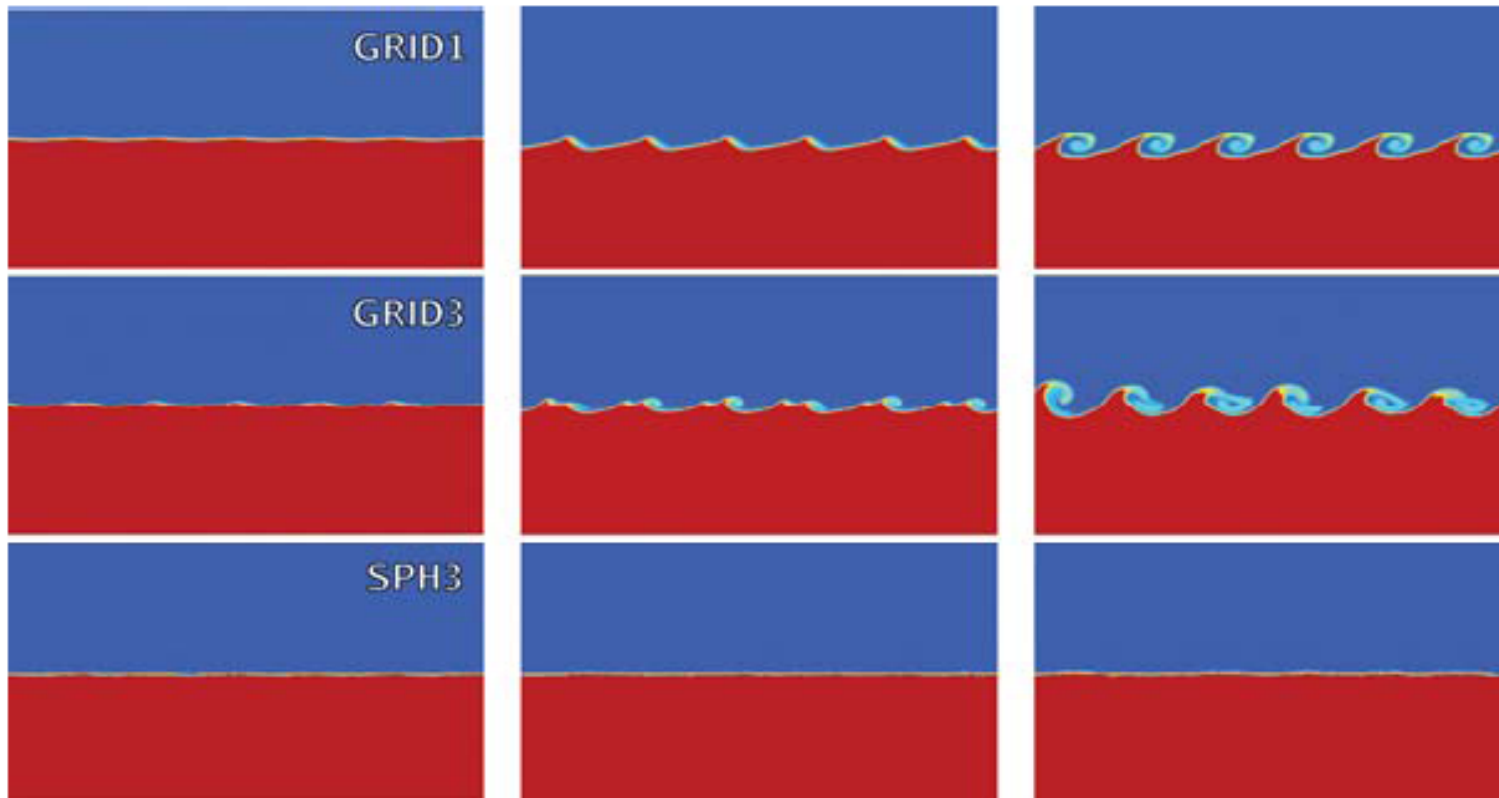
- SPH と Grid コードで、「Brob test」の答が全然違う
- もっと簡単な Kelvin-Helmholtz 不安定 (計算は3次元) でも全然違う
- SPH だめじゃん

どれくらい違うか (1)

- 周りよりつめたい (温度 1/10、密度 10 倍) ガスの球を超音速で動かす
- 上から 3 個は Grid
- 下の 2 つは Gasoline (下は 10M 粒子)
- SPH では境界での不安定が起きないで、冷たい流体が固まりのまま。

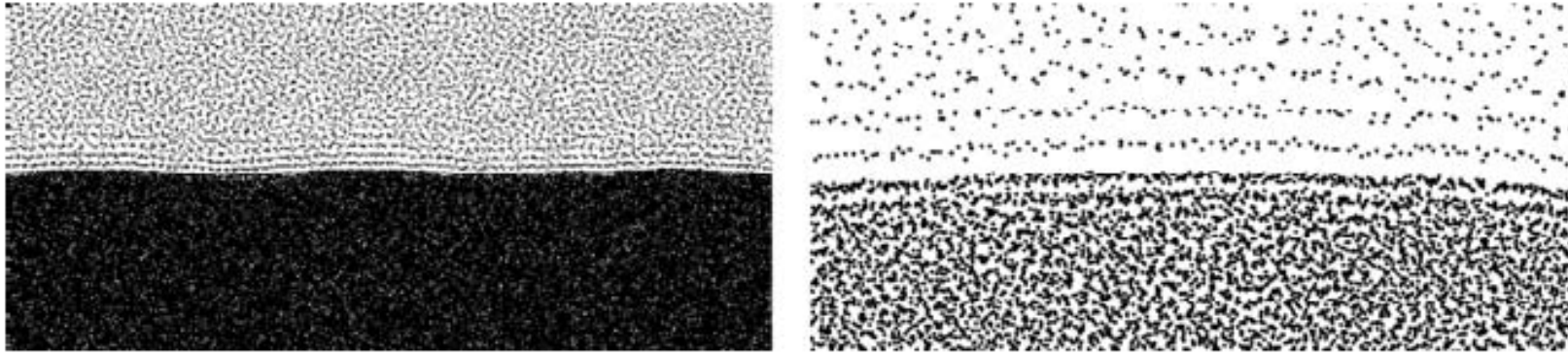


どれくらい違うか (2)



SPH では KH 不安定が起きない。

どれくらい違うか (3)



2流体の境界面で妙な隙間ができる。このため力が働かない？

密度不連続面での振る舞い

通常の SPH では、変形の2箇所では ρ の微分可能性を仮定している。以下の2つの「恒等式」である

$$1 = \sum_j m_j \frac{1}{\rho(\vec{x})} W(\vec{x} - \vec{x}_j). \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho + \nabla \frac{P}{\rho^2}. \quad (12)$$

SPH でカーネル推定した密度は滑らか。このため、

- 接触不連続の低密度側では、密度を過大推定、高密度側では過小推定する
- その結果、圧力、その空間微分もデタラメになる。結果として粒子が再配置される

対策

「根本的」な理由:

ρ は滑らかだけど u (内部エネルギー) はジャンプがある
まま。

この観点では、 u を滑らかにすればよい。色々提案あり。

- u にもカーネル推定した量を使う
- u を拡散させる (人工熱伝導)
- 質量密度でない密度 (数密度とか) を使う

それぞれ、それなりにうまくいくケースもある。

新しい提案 — 思想

圧力が本来変わってないのに、密度が不連続なだけでおかしいことが起こるのは何故か？

物理量 (とその微分) の推定式に密度を使うから:

$$\langle f \rangle(\vec{x}) = \sum_j \frac{m_j f(\vec{x}_j)}{\rho(\vec{x}_j)} W(\vec{x} - \vec{x}_j). \quad (13)$$

ここでやっていることは、本質的には体積要素 $d\vec{x}$ を $m_j/\rho(\vec{x}_j)$ で置き換えているだけ。

粒子の占める体積の推定さえできれば別に何を使ってもいいはず

新しい提案 — 原理

質量密度の代わりに何を使うか？

気体 (理想気体) は状態方程式 $PV = nRT$ で規定される。ここにはそもそも質量密度とかない。右辺は本質的には熱エネルギー (に比熱による係数かけたもの)

内部エネルギー密度 (結局圧力と同じ) を使えばどうか？

粒子当りの内部エネルギーは今の SPH でも時間発展させる量なので、単位体積当りの内部エネルギー、つまり圧力の空間分布は質量密度を使わなくても計算できる。

接触不連続では圧力は (もちろん) 連続なので、変なことは起きないかもしれない。

定式化(1)

粒子当りの内部エネルギーを

$$U_j = m_j u_j, \quad (14)$$

で定義 (u は単位質量当り) して、内部エネルギーの空間密度を

$$q = \sum_j U_j W(\vec{x} - \vec{x}_j). \quad (15)$$

で定義する。そうすると、他の物理量のカーネル推定は

$$\langle f \rangle(\vec{x}) = \sum_j \frac{U_j f(\vec{x}_j)}{q(\vec{x}_j)} W(\vec{x} - \vec{x}_j), \quad (16)$$

空間微分は

$$\langle \nabla f \rangle(\vec{x}) = \sum_j \frac{U_j f(\vec{x}_j)}{q(\vec{x}_j)} \nabla W(\vec{x} - \vec{x}_j). \quad (17)$$

定式化(2)—エネルギー方程式

普通は運動方程式を先に導くが、どっちかを決めるともう片方が決まるので簡単なこっちを先に。エネルギー方程式は

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{v}. \quad (18)$$

速度の発散の SPH 表現は、今回は

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \frac{U_j}{q_j} \nabla W(\vec{x} - \vec{x}_j). \quad (19)$$

P/ρ だが、圧力は

$$P_i = (\gamma - 1)q_i. \quad (20)$$

定式化(3)—エネルギー方程式つづき

密度がでてくるように見えるのは、左辺が単位質量当たりだから。これを U の微分に直すには、形式的には

$$\rho_i = \frac{m_i q_i}{U_i}. \quad (21)$$

という関係式を使う。そうすると、エネルギー方程式が

$$\dot{U}_i = \sum_j (\gamma - 1) \frac{U_i U_j}{q_j} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \nabla W(\vec{x}_i - \vec{x}_j). \quad (22)$$

定式化(4)—運動方程式

エネルギー方程式があるので、エネルギー保存から運動方程式を導く。2粒子の、2粒子の相互作用による内部エネルギー変化は

$$\dot{U}_{ij} + \dot{U}_{ji} = (\gamma - 1)U_i U_j \left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_j} \right) (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \nabla W(\vec{x}_i - \vec{x}_j). \quad (23)$$

で、これが運動エネルギー変化

$$\frac{m_i m_j}{m_i + m_j} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) (\dot{v}_i - \dot{v}_j). \quad (24)$$

と逆符号で絶対値が等しいので、速度変化が

$$(\dot{v}_i - \dot{v}_j) = -(\gamma - 1) \frac{m_i + m_j}{m_i m_j} U_i U_j \left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_j} \right) \nabla W(\vec{x}_i - \vec{x}_j), \quad (25)$$

定式化 (5) — 運動方程式つづき

重心が保存するように分配しなおすと

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = - \sum_j (\gamma - 1) U_i U_j \left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_j} \right) \nabla W(\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_j). \quad (26)$$

- 割合具合よさそうな対称化された形が何故かでてくる。
- 右辺には質量に依存する量がない。
- $1/q_i$ は対称化のためにでてくる項。SPH 近似の範囲で恒等的に 0。

実装の結果

従来の SPH1

新しい SPH1

従来の SPH2

新しい SPH2

これに関しては上手くいっているのではないか？

非理想気体への一般化の思想

状態方程式が理想気体と違う時にどうすればいいか？
(今日は省略)

非理想気体、その他の問題

- 非理想気体でも圧力ベースの定式化はできる
- 欠点: 大きな圧力勾配 (表面とか衝撃波) に弱い
- 感覚的には、SPH の既存の定式化には何かまだ根本的に不自然なところが残っている。

SPH の欠陥のリスト

- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面

シアー

現象としては:

- 渦が回らない
- 降着円盤が落ちる (10回転くらいしかもたない)

ということが大昔から知られている。

理由: 良くわかっていない、というか、いくつか説がある。

- 人工粘性
- 「粒子ノイズ」
- それ以外

人工粘性

- 単純な Monaghan-Gingold viscosity: 基本的に2粒子が近づいているとブレーキ
- これは色々問題
 - 只の音波も減衰する
 - シアー流でも粘性働く
- 通常に対応: Balsara Switch $|\nabla \cdot v| / (|\nabla \cdot v| + |\nabla \times v|)$
 - 純粋なシアー流でノイズなければ(ネイバー粒子無限なら)粘性0になるはず
 - 逆にいうと実際には0にならない

Cullen and Dehnen

- 色々やっていると論文には書いてある
- 基本的には非線型人工粘性。 $\nabla \cdot v$ が負の時にだけ人工粘性かける。但し、一度人工粘性かけたら急には0にしない (post-shock 振動を抑える)
- Balsara switch をなんだか面倒くさいものに置き換える。(等方な圧縮以外の項全部みる)

色々やって良かったのはこれ、と書いてあるが理屈はないのでこれではどうしようもない

Balsara switch は変じゃないか？

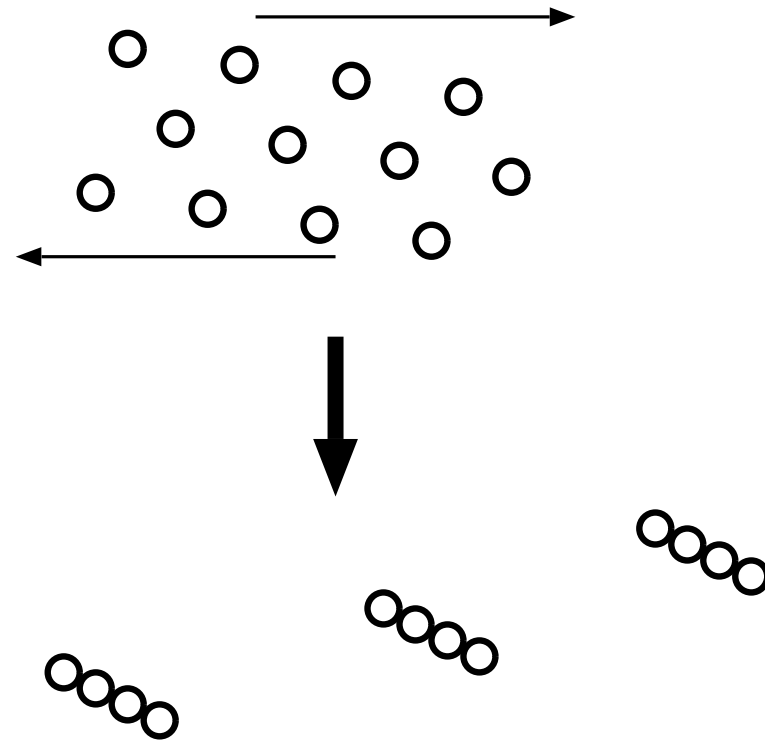
- シアー変形は回転＋非等方圧縮・伸長
- Balsara switch は回転をみている
- でも、非等方変形が本当の問題のはず。
- 非等方でも、1方向の圧縮ならよい、というか、そもそもショックはそういうもの。

考察というよりはまだ妄想

- ショックは本質的に平面的。
- なので、変形の主要な成分が1方向の圧縮で、それが大きい時にだけ人工粘性かけるべきでは？もちろん、post-shock oscillation には対応する必要があるので、なんらかのヒステリシスを入れる。
- 粒子の運動の方向に抵抗を入れるので、粒子間相互作用が中心力にならない。このため、角運動量が保存しなくなる。回転を消すような補正が必要。例えば、ある粒子からその全ネイバーへの力の人工粘性項に由来する力に対して、その回転モーメントをうちけすような項を追加する。

「粒子ノイズ」

- SPH での粒子配置: いわゆる「グラス」、完全に規則的ではない
- これにシア-とか微分回転を与えると最終的にはポアソンゆらぎがでてくる
- 途中にはもっとでたらめなものもでてくる
- いわゆる今枝問題



対応

- Imaeda and Inutsuka 2002 の方法: 流体の速度と粒子の速度を分離、流体の速度は SPH カーネルかけた速度で、これが SPH 運動方程式を満たすように粒子の位置、速度を陰的に決める。
- これは解が一意かどうか疑問。前ページの例では対称性からこの方法では数値解に変化ないはず。
- 実際に収束が悪いことがわかっている

どうなって欲しいか？

- シアー流に対して平行に粒子がならんでいれば今枝問題は起きない
- 降着円盤ならリング状
- 圧力が十分あればそういう再配置は起きる。
- 圧力が弱くても、局所的な平均粒子間距離より近くでは斥力が働くようにすれば再配置はできる
- これを運動方程式に入れるとしかしこれ自体が拡散的に働く。シアー流で粒子が振動する。但し、斥力が遠方では負になって一様密度で平均0になるなら少なくともネイバー数無限大の極限では元の SPH 方程式と誤差の範囲で一致。
- 運動方程式にはいれないで動かすだけ、というのもありえる。内部エネルギーは補正がいる。

綺麗にならんでいれば大丈夫か？

- 対称性があれば大丈夫
- ということは、一般には完全な対称性はないので何か起こる気がする。



- 本質的には、粒子が横を通り過ぎると必ず力が変化する、というのが問題。
- 変化しない定式化: SPH ではなく MLS とか MPS ならできるが、大きな密度変化等がないという仮定が入る

まとめ

- あんまりまとまってない
- シアーの扱いは Balsara switch で解決というわけでは全然ない
- 色々な論文があって全然いっていることが違う
- まだ何か根本的におかしいような気がする